PDF Eraser Free

المشتقة Derivative

مشتقة الدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x هي الدالة $f'(x)$ وتعرّف كما يلي :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

قواعد المشتقة :

لتكن كل من $f(x)\,,g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق وليكن c ثابت و $n \in \mathbb{R}$ فانّ :

1. $\frac{dc}{dx} = 0$
2. $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$
3. $\frac{d}{dx}[f(x) \mp g(x)] = f'(x) \mp g'(x)$
4. $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x).g'(x) + g(x).g'(x)$
5. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$; $g(x) \neq 0$
6. $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}.f'(x)$

مثال (١) جد مشتقة الدوال التالية :

$$1.\, f(x) = \left(\frac{1+3x}{3x}\right)(3-x)$$
$$2.\, f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$
$$3.\, f(x) = (x^2+2)^5\sqrt{x^2-2x}$$

الحل :

$$1.\, f'(x) = \left(\frac{1+3x}{3x}\right) \times (-1) + (3-x) \times \frac{3x \times 3 - (1+3x) \times 3}{9x^2}$$

$$= \frac{-1-3x}{3x} + \frac{x-3}{3x^2}$$

$$= \frac{-x-3x^2+x-3}{3x^2} = \frac{-(x^2+1)}{x^2}$$

$$2.\ f'(x) = \frac{(1-\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - (1+\sqrt{x}) \times \frac{-1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}}{(1-\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$$

$$3.\ f'(x) = \frac{(x^2+2)^5 \times (2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}} + \sqrt{x^2-2x} \times 5(x^2+2)^4 \times 2x$$

$$= (x^2+2)^4 \left(\frac{(x^2+2)(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}} + 10x\sqrt{x^2-2x} \right)$$

$$= \frac{(x^2+2)^4(11x^3-21x^2+2x-2)}{\sqrt{x^2-2x}}$$

مثال (٢) جد قيمة $f'(3)$ و$f''(3)$ للدالة $f(x) = (9+2x^2)^{5/3}$.

الحل :

$$f'(x) = \frac{5}{3}(9+2x^2)^{2/3} \times 4x$$

$$f'(3) = \frac{5}{3}(9+2(3)^2)^{2/3} \times 4 \times 3$$

$$= 180$$

$$f'(x) = \frac{20x}{3}(9+2x^2)^{2/3}$$

$$f''(x) = \frac{20x}{3} \times \frac{2}{3}(9+2x^2)^{-1/3} \times 4x + \frac{20}{3}(9+2x^2)^{2/3}$$

$$f''(x) = \frac{160x^2}{9(9+2x^2)^{1/3}} + \frac{20}{3}(9+2x^2)^{2/3}$$

$$f''(3) = \frac{160 \times 9}{9(9+2(3)^2)^{1/3}} + \frac{20}{3}(9+2(3)^2)^{2/3} = \frac{340}{3}$$

PDF Eraser Free

قاعدة السلسلة Chain rule

اذا كانت $y = f(u)$ و $u = g(x)$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال (٣) اذا كانت $y = x^2 + \frac{x}{2}$ و $x = 2t - 5$ فجد $\frac{dy}{dt}$.

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(2x + \frac{1}{2}\right) \times 2$$

$$= 4x + 1$$

$$= 8t - 19$$

مثال (٤) جد $\frac{dy}{dx}$ اذا علمت ان $x = t + \frac{1}{t}$ و $y = t - \frac{1}{t}$

الحل :

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 + 1}{t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t^2 + 1}{t^2} \times \frac{t^2}{t^2 - 1}$$

$$= \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$$

PDF Eraser Free

مثال (٥) اذا كان $r = \sqrt{s+1}$ و $s = 109t^2 - 2t$ فجد $\frac{dr}{dt}$.

الحل:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{s+1}}$$

$$\frac{ds}{dt} = 218t \quad -2$$

$$= 2(109t - 1)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \times \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{s+1}} \times 2(109t - 1)$$

$$= \frac{109t - 1}{\sqrt{109t^2 - 2t + 1}}$$

مثال (٦) جد قيمة $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $x = \sqrt[3]{2t^2 - 1}$ و $y = (4t + 5)^{3/2}$ عند $t = 1$.

الحل :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{2}(4t + 5)^{1/2} \times 4 = 6\sqrt{4t + 5}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = 18$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}(2t^2 - 1)^{-2/3} \times 4t$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = 18 \times \frac{3}{4} = \frac{27}{2}$$

PDF Eraser Free

التطبيق الهندسي للمشتقة

من اهم التطبيقات الهندسية للمشتقة هو إيجاد معادلتي المماس لمنحني الدالة والعمود عليه عند نقطة التماس وهنا نحتاج الى معرفة ميل منحنى الدالة عند نقطة التماس وهو يساوي قيمة المشتقة الأولى للدالة عند هذه النقطة .

مثال (٧) جد معادلة المماس والعمود عليه للمنحني $y = x^3 - 4x + 1$ عند $x = 2$.

الحل:

$$y' = 3x^2 - 4$$

$$y'(2) = 3(2)^2 - 4 = 8$$

ميل المماس $m_1 = y'(2) = 8$

$$y(2) = (2)^3 - 4(2) + 1 = 1$$

نقطة التماس $(2,1)$

معادلة المماس $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$$y - 1 = 8\,(x - 2)$$

$$y - 8x + 15 = 0$$

ميل العمود $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{8}$

معادلة العمود

$$y - 1 = -\frac{1}{8}\,(x - 2)$$

$$8y + x - 10 = 0$$

PDF Eraser Free

مثال (٨) جد معادلة المماس والعمود عليه لمنحني الدالة $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y - 6 = 0$ عند نقطة التماس $(2,2)$.

الحل:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y - 6 = 0$$

$$2x - 2xy' - 2y + 2yy' + 2 + y' = 0$$

$$4 - 4y' - 4 + 4y' + 2 + y' = 0$$

$$y' = -2$$

$$m = -2$$ ميل المماس

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$ معادلة المماس

$$y - 2 = -2\,(x - 2)$$

$$y + 2x - 6 = 0$$

$$m = 1/2$$ ميل العمود

$$y - 2 = (1/2)\,(x - 2)$$ معادلة العمود

$$2y - x - 2 = 0$$

مثال (٩) جد معادلة المماس للمنحني $y = (4t)^{\frac{1}{3}}$, $x = t\sqrt{2t+5}$ عند $t = 2$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{2t+5}} + \sqrt{2t+5} \quad at \quad t = 2 \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}(4t)^{-\frac{2}{3}} \times 4 \qquad at \quad t = 2 \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{11} \quad \rightarrow \qquad m = \frac{1}{11}$$ ميل المماس

$$t = 2 \quad \rightarrow \quad x = 6 \quad and \quad y = 2 \quad \rightarrow \quad (6,2)$$ نقطة التماس

$$y - 2 = \frac{1}{11}(x - 6)$$

$$11y - x - 16 = 0$$

PDF Eraser Free

تطبيقات فيزيائية للمشتقة (المسافة والسرعة والتعجيل)

اذا تحرك جسم على خط مستقيم وقطع مسافة s بزمن t فان سرعته $v(t)$ هي المشتقة الاولى للمسافة ، وتعجيله $a(t)$ هو المشتقة الثانية للمسافة أو مشتقة السرعة

اي ان :

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} \quad \text{و}$$

مثال (١٠) جسم يتحرك وفق المعادلة $s = \frac{1}{4}t^4 + t^3 - 12t^2$ حيث s الازاحة بالأمتار و t الزمن بالثواني جد:

(١) سرعة و تعجيل الجسم عند $t = 5\ sec$.

(٢) الازاحة عندما يكون التعجيل صفر .

الحل :

$$v = \frac{ds}{dt} = t^3 + 3t^2 - 24t$$

$$v|_{t=5} = (5)^3 + 3(5)^2 - 24 \times 5 = 125 + 75 - 120 = 80 \ \ m/sec$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 3t^2 + 6t \quad - 24$$

$$a|_{t=5} = 3(5)^2 + 6 \times 5 - 24 = 75 + 30 - 24 = 81 \qquad m/sec^2$$

$$a = 3t^2 + 6t \quad - 24 = 0 \quad \rightarrow \ t^2 + 2t \quad - 8 = 0$$

$$(t+4)(t-2) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 2\ sec$$

$$s|_{t=2} = \frac{1}{4}(2)^4 + (2)^3 - 12(2)^2 = 4 + 8 - 48 = -36 \ m$$

PDF Eraser Free

مثال (١١) جسم يتحرك وفق المعادلة $s = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 15t$ حيث s الازاحة بالامتار و t بالثواني جد الازاحة المقطوعة لكي يصل الجسم لحالة السكون .

الحل :

$$\frac{ds}{dt} = t^2 + 2t - 15$$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$(t+5)(t-3) = 0$$

$$t = 3 \ sec$$

الازاحة المقطوعة لكي يصل الجسم لحالة السكون هي

$$s = \frac{1}{3}(3)^3 + (3)^2 - 15(3) = -37 \ m$$

مثال (١٢) جسم يتحرك وفق المعادلة $s = (t^2 - 2t - 8)^2$ حيث s الازاحة بالامتار و t الزمن بالثواني جد الازاحة عند سكون الجسم .

$$s = (t^2 - 2t - 8)^2$$

$$\frac{ds}{dt} = v = 2(t^2 - 2t - 8)(2t - 2)$$

$$2(t^2 - 2t - 8)(2t - 2) = 0$$

$$4(t-4)(t+2)(t-1) = 0$$

$t = 4 \sec$

$t = -2$ تهمل

$t = 1 \ sec$

$s|_{t=4} = ((4)^2 - 2(4) - 8)^2 = 0 \ m$

$s|_{t=1} = ((1)^2 - 2(1) - 8)^2 = 81 \ m$

PDF Eraser Free

تمارين

جد dy/dx لكل مما يلي

1. $y = x^2\sqrt{2x^2+3}$
2. $x^2y = y^2 + 2xy + 5$
3. $y = \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)^2$
4. $y = 4\,x\,\sqrt{x+\sqrt{x}}$
5. $y = \sqrt{t^2-4}\,+3\;,\quad x = 3t\sqrt{2t+1}$
6. $y = t - \frac{1}{t^2}\;,\quad x = t + \frac{1}{t^2}$
7. $y = t\sqrt{t+1}\;,\quad x = \sqrt{2t-3}$
8. $y = s - \sqrt{s}\;,\quad x = s + \sqrt{s}$

جد معادلة المماس والعمود عليه للمنحنيات ادناه عند النقطة المعطاة :

9. $y = \frac{4x}{x^2+1}\;,\; x = 1$
10. $x^2 + xy - y^2 = 1,\; x = 2$
11. $y = \sqrt{3t},\quad x = -\sqrt{t+1}\;,\; t = 3$

12. جسم يتحرك وفق المعادلة $s = (t^2-8)^{2/3}$ حيث s الازاحة بالامتار و t الزمن بالثواني جد سرعة الجسم وتعجيله عند $t = 3\,\text{sec}$.

13. جسم يتحرك وفق المعادلة $s = t^3 - 6t^2 + 9t - 2$ حيث s الازاحة بالأمتار و t الزمن بالثواني جد:

(١) سرعة و تعجيل الجسم عند $t = 4\,sec$.

(٢) الازاحة عندما يكون التعجيل صفر .